
INFLUÊNCIA DO MOMENTO DE INÉRCIA NO MOVIMENTO DOS CORPOS RÍGIDOS⁺*

Alessio T. B. Celeste

Miguel L. Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão

Pernambucano

Petrolina – PE

Resumo

Com o propósito de realizar um estudo para discutir conceitos de conservação de energia, centro de massa e momento de inércia, idealizamos um experimento de competição entre corpos rígidos usando corpos de formas geométricas arredondadas (anel, cilindros e esferas) e com massas diferentes. Para saber qual o corpo que alcança primeiro a parte inferior de um plano inclinado, deixamos esses corpos rolarem, sem deslizamento, do topo do plano. Encontramos resultados interessantes como, por exemplo, a velocidade do centro de massa não depender nem da massa nem do raio do corpo. Observamos que esse resultado se aplica a qualquer corpo em rotação que tenha o centro de massa no centro geométrico e que role sem escorregamento. Analisamos os resultados experimentais para verificarmos se estavam em concordância com a teoria abordada.

Palavras-chave: *Centro de massa. Conservação de energia. Momento de inércia.*

⁺ The influence of the moment of inertia in motion of rigid bodies

^{*} *Recebido: junho de 2011.
Aceito: setembro de 2011.*

Abstract

With the purpose of conducting a study to discuss concepts of energy conservation, center of mass and moment of inertia, we designed an experiment of competition between rigid bodies using bodies of rounded shapes (ring, cylinders and spheres) and with different masses. To find the first body that reaches the bottom of an inclined plane, we left these bodies roll without sliding on top of the plan. We found interesting results, for example, the speed of the center of mass does not depend on either the mass or the radius of the body. We noticed that this result applies to any rotating body that has the mass center at the geometric center and roll without slipping. We analyzed the experimental results to verify if they were in agreement with the theory discussed.

Keywords: *Center of mass. Energy conservation. Moment of inertia.*

I. Introdução

Na intenção de consolidar conceitos não muito intuitivos nos cursos de física básica com os nossos alunos do curso de licenciatura em Física do IF Sertão-PE, propusemos a realização de um experimento que abordasse temas relacionados com corpos rígidos, centro de massa, velocidade e aceleração do centro de massa, conservação de energia, momento de inércia, entre outros. O experimento escolhido foi o que chamamos de *competição entre corpos rígidos*, que consiste em abandonar corpos rígidos de formas geométricas arredondadas (anel, cilindros e esferas) e com massas diferentes sobre um plano inclinado e saber qual seria a ordem de classificação dessa “competição”.

II. Embasamento teórico

Analisaremos o problema de corpos rígidos como esferas, cilindros e anéis rolando sem deslizar em um plano inclinado com pequeno ângulo de inclinação θ . As forças que atuam sobre o corpo rígido quando este se desloca sem escorregamento sobre um plano inclinado de altura h são: o peso $m\mathbf{g}$ para baixo, a força normal \mathbf{F}_n , que equilibra a componente normal do peso, e a força de atrito \mathbf{f} , que é exercida pelo plano, conforme mostrado na Fig. 1.

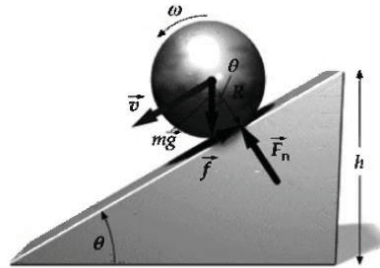


Fig. 1- Forças que atuam sobre uma esfera que rola por um plano inclinado.

Como não há escorregamento, a força de atrito é estática e, conseqüentemente, a energia mecânica é conservada. A conservação de energia dá, portanto,

$$\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = mgh, \quad (1)$$

em que I_{CM} é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa pelo seu centro de massa. Podemos dizer que, no movimento de rotação, o momento de inércia é análogo à massa no movimento de translação, ou seja, é tanto mais difícil fazer o corpo girar quanto maior for o seu momento de inércia. Na Fig. 2, temos as expressões para os momentos de inércia das formas geométricas utilizadas neste trabalho. Observe que as expressões possuem a forma $I_{CM} = \gamma mR^2$, onde $\gamma \leq 1$ é um número puro, cujo valor depende da forma do corpo.

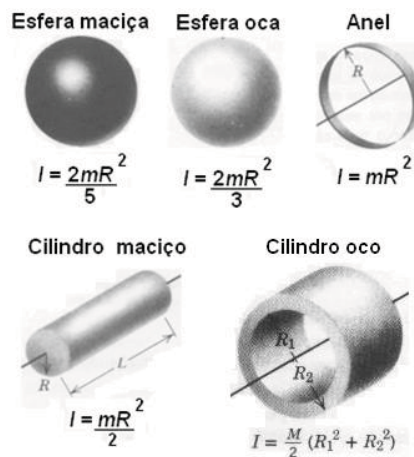


Fig. 2 - Momentos de inércia.

Da equação (1) podemos escrever de forma geral, para a velocidade do centro de massa no término do plano inclinado:

$$\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\gamma mR^2 \left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 = mgh \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}} \quad (2)$$

Um resultado importante na equação anterior é que a velocidade do centro de massa independe do raio R e da massa m do corpo rígido. Observe, na mesma equação, que os corpos com valores de γ pequenos chegam primeiro que os corpos com valores de γ elevados, veja a Fig. 3.

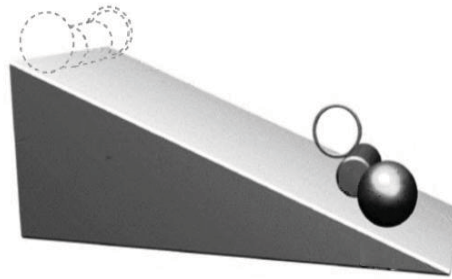


Fig. 3 - A esfera, o cilindro e o anel partem, ao mesmo tempo, do repouso do topo do plano inclinado.

Portanto, teoricamente, para a nossa corrida, a ordem de classificação terá que estar de acordo com o que é apresentado no Quadro 1 abaixo:

Quadro 1 - Ordem de classificação “teórica” na nossa corrida.

Ordem	Valor de γ	Corpo rígido
1 ^o	2/5 = 0,4	Esfera maciça
2 ^o	1/2 = 0,5	Cilindro maciço
3 ^o	2/3 = 0,7	Esfera oca
4 ^o	$\gamma \approx 1$	Cilindro oco
5 ^o	1	Anel

Encontraremos, agora, a equação para a aceleração do centro de massa da esfera na Fig. 1. Da segunda lei de Newton, escrevemos

$$\sum \mathbf{F} = mg\text{sen}\theta - f = ma_{CM} \Rightarrow a_{CM} = g\text{sen}\theta - \frac{f}{m} \quad (3)$$

$$\Sigma \tau = fR = I_{CM}\alpha = I_{CM}\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow f = I_{CM}\frac{a_{CM}}{R^2} \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na equação (3), obtemos:

$$a_{CM} = g\text{sen}\theta - \frac{I_{CM}}{m}\frac{a_{CM}}{R^2} \Rightarrow a_{CM} = g\text{sen}\theta - \frac{\gamma m R^2}{m} \frac{a_{CM}}{R^2} = g\text{sen}\theta - \gamma a_{CM} \Rightarrow$$

$$a_{CM} = \frac{g\text{sen}\theta}{1+\gamma} \quad (5)$$

Observe que a aceleração do centro de massa é constante e, para calcular o tempo de percurso do corpo sobre o plano inclinado, usamos

$$v_{CM} = v_{CM}^0 + a_{CM}t \Rightarrow \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}} = 0 + \frac{g\text{sen}\theta}{1+\gamma}t \Rightarrow t = \frac{1}{\text{sen}\theta} \sqrt{\frac{2h(1+\gamma)}{g}} \quad (6)$$

III. O experimento

O experimento consistia em abandonar cinco corpos rígidos a partir do repouso (ver Fig. 4) do topo de um plano inclinado com atrito, cujo ângulo de inclinação é $\theta = 8^\circ$ (medido com o aparato da Fig. 5), altura $h = 19,2$ cm e comprimento de deslocamento sobre o plano $L = 153$ cm, de modo que a energia cinética e a energia potencial no topo são, respectivamente, $K_1 = 0$ e $U_1 = mgh$, onde m é a massa do corpo e g é a aceleração da gravidade. Nesse caso, o atrito é importante, pois é a força de atrito estático que causa a rotação dos corpos ao longo do deslocamento.



Fig. 04 - Corpos rígidos usados (da esquerda para a direita: cilindro maciço, esfera oca, cilindro oco, esfera maciça e anel).

Com a balança e as massas padronizadas, medimos as massas dos corpos rígidos; com o paquímetro, medimos os raios de cada um deles e, com o cronômetro (ver Fig. 5), medimos o tempo de percurso dos mesmos sobre o comprimento L no plano inclinado, conforme apresentado no Quadro 2 a seguir.

Inicialmente, abandonamos cada corpo individualmente e medimos o tempo de percurso ao longo do plano inclinado. Realizamos esse procedimento

várias vezes e encontramos a média dos tempos de percurso para cada um deles, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Massa e tempo de percurso dos corpos usados.

Corpo rígido	Massa	Raios	Tempo calculado	Tempo medido	Erro percentual
Esfera maciça	32 g	1,10 cm	1,68 s	1,62 s	3,6 %
Cilindro maciço	250 g	1,26 cm	1,74 s	1,70 s	2,3 %
Esfera oca	3 g	1,26 cm	1,84 s	1,92 s	4,3 %
Cilindro oco	50 g	1,26 cm	1,98 s	1,93 s	2,5 %
Anel	2 g	1,26 cm	2,01 s	1,96 s	2,5 %

Fizemos, ainda, o lançamento simultâneo de todos os corpos, realizando a *competição* entre eles. A classificação dessa “*corrida*”, conforme pode ser observado na Fig. 5, foi a seguinte: a esfera maciça chega em primeiro lugar, o cilindro maciço em segundo, a esfera oca em terceiro, o cilindro oco em quarto e o anel em quinto lugar. Esse resultado pode ser verificado também nos valores dos tempos apresentados no Quadro 2.

Durante a realização do experimento, observamos que não houve deslizamento dos corpos ao longo do plano inclinado, devido ao atrito estático existente entre os corpos rígidos e o plano inclinado. Essa observação é importante, pois indica que a rotação ocorre uniformemente.

IV. Conclusão

Além de toda a montagem experimental realizada, da discussão e do aprendizado sobre momento de inércia, conservação de energia, força de atrito, entre outros conceitos físicos, podemos destacar que um ponto muito importante que destacamos neste experimento é que pudemos mostrar e analisar, na teoria e na prática, que existe uma situação peculiar na qual um corpo mais leve “*cai*” primeiro, ou melhor, pode chegar primeiro à base do plano inclinado que um corpo mais pesado, quando eles são abandonados do topo desse plano. Esse resultado pode ser observado e comprovado no Quadro 2. Isso acontece devido à diferença existente

entre os momentos de inércia dos corpos envolvidos (veja Fig. 2), que indica a distribuição da massa do corpo com relação ao eixo de rotação.

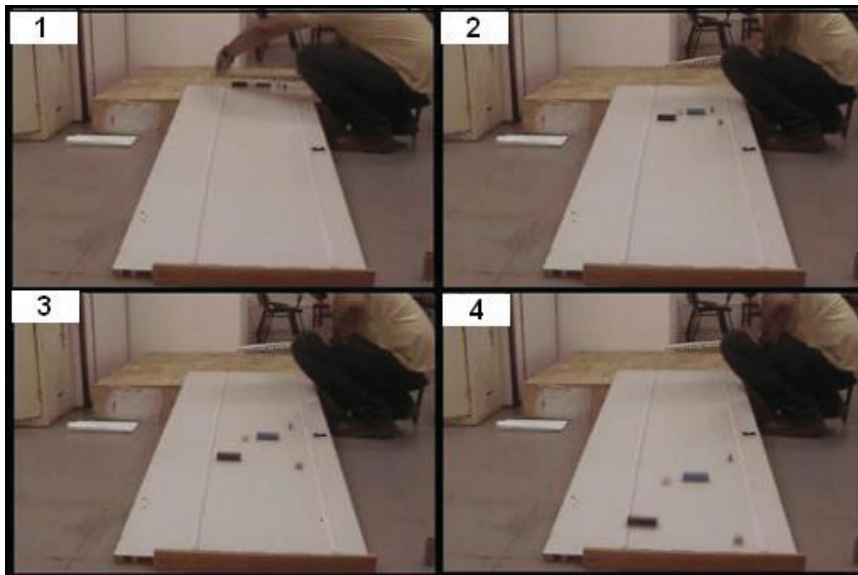


Fig. 05 - *Competição entre corpos rígidos.*

Agradecimentos

O autor Alessio T. B. Celeste agrade ao apoio do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID, da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Referências bibliográficas

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física**. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 1.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I**. São Paulo: Pearsom, 2008. 12. ed.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 4. ed. Revisada, São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.